数　学

氏名	

受験番号	

1 次の問に答えよ。

(1) x, y が正の実数で, $\log_x y = t$ とするとき, $\log_y \dfrac{x^3}{y^4}$ を t で表せ。

(2) 連立不等式

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad (\log_x y)^2 + \log_y \frac{x^3}{y^4} \leqq 0$$

の表す領域を, xy 平面上に図示せよ。

[解答例]

(1) x, y は対数の底なので $x, y \neq 1$ である。このとき, $\log_y \dfrac{x^3}{y^4} = 3\log_y x - 4 = \dfrac{3}{\log_x y} - 4 = \dfrac{3}{t} - 4$ となる。

(2) $(\log_x y)^2 + \log_y \dfrac{x^3}{y^4} \leqq 0$ を t で表すと

$$t^2 + \frac{3}{t} - 4 \leqq 0$$

となる。$0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ のとき $\log x < 0, \log y < 0$ なので $t = \log_x y = \dfrac{\log y}{\log x} > 0$ であるから両辺に t をかけて

$$t^3 - 4t + 3 \leqq 0$$

となる。$t^3 - 4t + 3 = (t-1)\left(t + \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(t + \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$ なので $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} > 1$ に注意すると

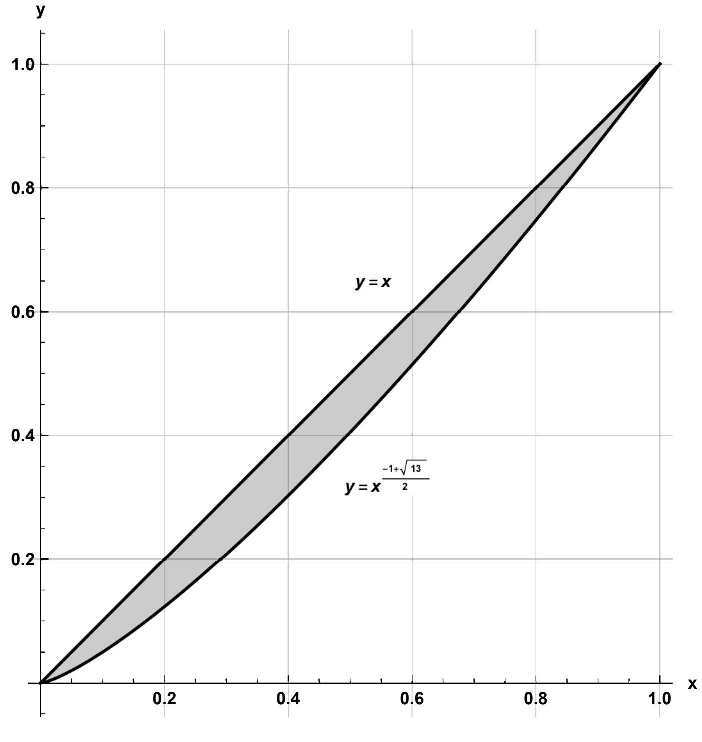
$$1 \leqq t (= \log_x y) \leqq \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

となる。$0 < x < 1$ なので x^t は t に関して単調減少関数であるから

$$x \geqq y \geqq x^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}} \quad (0 < x, y < 1)$$

となる。$f(x) = x^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}$ とおく。$\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} > 1$ なので $x > 0$ のとき $f'(x) > 0$ かつ $f''(x) > 0$ となるので, $f(x)$ は下に凸の単調増加関数である。

この領域を図示すると, 下図のようになる。ただし, 境界線は含むが, 点 $(0,0)$, $(1,1)$ は除く。



得点	

数　　　学

氏 名	

受験番号	

2 i を虚数単位とし, $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1+i}$ とする。複素数 $z_n\ (n=1,2,\cdots)$ は

$$z_1=i,\qquad z_{n+1}=f(z_n)\quad (n=1,2,\cdots)$$

を満たしているとする。このとき次の問に答えよ。

(1) 虚部が正となる複素数 α で $f(\alpha)=\alpha$ となるものを求めよ。

(2) n が奇数のとき, z_n は虚部が正である純虚数であることを示せ。

(3) $|z_n|$ を z_n の絶対値とするとき, 数列 $\{|z_n|\}$ の極限を求めよ。

[解答例]

(1)　α は虚部が正なので, $\alpha\neq -1-i$ である。さらに, $\alpha=f(\alpha)=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1+i}$ をみたすので，$\alpha^2+i\alpha+1=0$ となる。$\alpha=a+bi$ (a,b は実数で $b>0$) とおき, $\alpha^2+i\alpha+1=0$ に代入し, 整理すると $(a^2-b^2-b+1)+a(2b+1)i=0$ となる。$b>0$ より $2b+1\neq 0$ であるから $a=0$ となり, $-b^2-b+1=0$ となる。これを解いて, $b=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ すなわち, $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}i$ となる。

(2)　$w=1+i$ とおく。このとき, $n=1,2,\cdots$ に対し,

$$z_{n+2}=f(z_{n+1})=\frac{z_{n+1}-1}{z_{n+1}+w}=\frac{f(z_n)-1}{f(z_n)+w}=\frac{\frac{z_n-1}{z_n+w}-1}{\frac{z_n-1}{z_n+w}+w}=\frac{z_n-1-z_n-w}{z_n-1+wz_n+w^2}=\frac{-(1+w)}{(w+1)z_n+(w+1)(w-1)}=\frac{-1}{z_n+i}$$

となる。

m を自然数とするとき, z_{2m-1} は虚部が正である純虚数であることを示せばよい。このことを数学的帰納法を用いて示す。$m=1$ のとき $z_{2\cdot1-1}=z_1=i$ は虚部が正の純虚数である。次に, $m\geqq 1$ として, $z_{2m-1}=ki\ (k>0)$ とすると，上の式より

$$z_{2(m+1)-1}=z_{2m+1}=\frac{-1}{z_{2m-1}+i}=\frac{-1}{ki+i}=\frac{1}{k+1}i$$

となり $z_{2(m+1)-1}$ は虚部が正の純虚数となる。よって, すべての自然数 m について, z_{2m-1} は虚部が正の純虚数となる。

(3)　先ず，$a_n=|z_{2n-1}|\ (n=1,2,\cdots)$ として数列 $\{a_n\}$ を定義すると (2) より $a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n+1}$ をみたす。もし，$\{a_n\}$ が極限値 a をもつとすると両辺の極限をとって $a=\dfrac{1}{a+1}$ をみたす。すなわち $a^2+a-1=0$ で $a\geqq 0$ に注意すると $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となる。実際 a が $\{a_n\}$ の極限値であることを示す。今,

$$\begin{aligned}|a_n-a| &= \left|\frac{1}{a_{n-1}+1}-\frac{1}{a+1}\right|=\left|\frac{a-a_{n-1}}{(a_{n-1}+1)(a+1)}\right|\\ &\leqq \frac{1}{a+1}|a_{n-1}-a|\leqq\cdots\leqq\left(\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}|a_1-a|=\left(\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}|1-a|\end{aligned}$$

であるが, $a>0$ より $0<\dfrac{1}{a+1}<1$ であるので $n\to\infty$ のとき $\left(\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}|1-a|\to 0$ となる。したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|z_{2n+1}|=a$ がわかる。

$x>0$ のとき $|f(xi)|$ が x の連続関数であることと (1) より $f(ai)=ai$ に注意すると

$$\lim_{n\to\infty}|z_{2n}|=\lim_{n\to\infty}|f(z_{2n-1})|=\lim_{n\to\infty}|f(a_{n-1}i)|=|f(ai)|=a$$

となる。以上より,

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|=a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

となる。

数　　学

氏名　　　受験番号

3　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ \dfrac{\sin x}{e^x-1} & (x\neq 0)\end{cases}$$

で定義する。次の問に答えよ。

(1) 正の実数 x に対して，x^2, $(e^x-1)^2$, $2(xe^x-e^x+1)$ の間の大小関係を求めよ。

(2) $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であることを示せ。

(3) $x=0$ における $f(x)$ の微分係数を求めよ。

[解答例]

(1) $x>0$ のとき, $x^2<2(xe^x-e^x+1)<(e^x-1)^2$ が成り立つことを以下で示す。

$F(x)=(e^x-1)^2-2(xe^x-e^x+1)$, $G(x)=2(xe^x-e^x+1)-x^2$ とおく。 $F(0)=G(0)=0$ であるので, $x>0$ のとき, $F'(x)>0$, $G'(x)>0$ を示せばよい。まず, $F'(x)=2e^x(e^x-1-x)$ である。$2e^x>0$ であり，$(e^x-1-x)'=e^x-1$ より，$x>0$ のとき, $(e^x-1-x)>0$ がわかる。従って $F'(x)>0$ となる。一方，$G'(x)=2x(e^x-1)$ となり, $x>0$ のとき，$2x$ と e^x-1 は正なので $G'(x)>0$ となる。

(2) 関数 $g(x)$, $h(x)$ を

$$g(x)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ \dfrac{\sin x}{x} & (x\neq 0)\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ \dfrac{x}{e^x-1} & (x\neq 0)\end{cases}$$

で定義する。このとき,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=g(0),\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-e^0}{x}\right)^{-1}=(e^0)^{-1}=1=h(0),$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1}=1=f(0)$$

であるので, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ は $x=0$ で連続であり, $f(x)=g(x)h(x)$ が成り立つ。よって, $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であることを言うためには, $g(x)$ と $h(x)$ がそれぞれ $x=0$ で微分可能であることを示せば十分である。

<u>$g(x)$ の $x=0$ における微分可能性</u>　$x\neq 0$ のとき, $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}$ となる。 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき, $1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$ なので $0\geqq\dfrac{\sin x}{x}-1\geqq\cos x-1$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x-\cos 0}{x}=-\sin 0=0$ であるので, はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=0$ が従う。また $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{t\to+0}-\frac{\frac{\sin t}{t}-1}{t}=0$ となる。よって, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能であり, $g'(0)=0$ が成り立つ。

<u>$h(x)$ の $x=0$ における微分可能性</u>　$h(x)$ は $x\neq 0$ で微分可能であるので平均値の定理より，任意の $x\neq 0$ に対して，$\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=h'(\theta(x)x)$ を満たす $0<\theta(x)<1$ が存在する。よって，$h(x)$ が $x=0$ において微分可能であること，すなわち極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}$ が存在することを示すためには，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}h'(x)$ が存在することを示せばよい。$x\neq 0$ のとき，$h'(x)=\left(\dfrac{x}{e^x-1}\right)'=-\dfrac{xe^x-e^x+1}{(e^x-1)^2}$ となる。また，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(e^x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^2=1$,　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{(e^x-1)^2}=1$ であるので, (1) で示した不等式と同様に $x\leqq 0$ のとき, $x^2\geqq 2(xe^x-e^x+1)\geqq(e^x-1)^2$ が成立することに注意すると, はさみうちの原理より,

$$\lim_{x\to-0}-\frac{xe^x-e^x+1}{(e^x-1)^2}=\lim_{x\to+0}-\frac{xe^x-e^x+1}{(e^x-1)^2}=-\frac{1}{2}$$

が成り立つ。よって, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}h'(x)$ が存在することが示された。

(3): (2) より, $g'(0)=0$, $h'(0)=-\dfrac{1}{2}$ となる。よって,

$$f'(0)=g'(0)h(0)+g(0)h'(0)=0\cdot 1+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

となる。

[別解] $x \neq 0$ のとき, $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ は微分可能である。また, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{x}{e^x - 1} = 1 = f(0)$ となる。よって, ロピタルの定理より, もしも極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} f'(x)$ が存在するならば, 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ も存在し, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} f'(x)$ が成り立つ。$x \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} f'(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)\cos x - e^x \sin x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-(e^x - 1)\sin x - e^x \sin x}{2(e^x - 1)e^x} \\
&= -\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{2e^x} + \frac{\sin x}{2(e^x - 1)} \right) = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2(e^x - 1)} = -\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2e^x} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

となる。ただし, 2 つ目と 5 つ目の等号はロピタルの定理により成り立つ。以上より, $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であることが示された。また, $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ となる。

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

4　原点を中心とする半径 2 の円 C_1 と極方程式 $r^2\cos 2\theta = 1$ $\left(-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$ の表す曲線 C_2 について，次の問に答えよ。

(1) C_2 を直交座標に関する方程式で表せ。

(2) C_1 と C_2 で囲まれた図形を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

[解答例]

(1) 直交座標を (x, y) とすると

$$r\cos\theta = x, \quad r\sin\theta = y, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

である。$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ なので，

$$r^2\cos 2\theta = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = x^2 - y^2$$

となる。$-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ に注意すると，C_2 の直交座標に関する方程式は $x^2 - y^2 = 1$ $(x > 0)$ である。

(2) C_1 と C_2 の交点を $(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ とすると，$4\cos 2\alpha = 1$，すなわち $2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{1}{4}$ となる。$\cos\alpha > 0$ より $\cos\alpha = \sqrt{\frac{5}{8}}$ である。したがって交点の座標は $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ となる。

与えられた図形を原点中心に反時計回りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させると，C_1 は C_1 に移り，C_2 は極方程式

$$r^2\cos\left(2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right) = r^2\sin 2\theta = 1 \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される曲線 C_2' に移る。$\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$ より，曲線 C_2' を直行座標で表せば

$$xy = \frac{1}{2} \quad (x, y > 0)$$

となる。また，直線 $y = -x$ は $\dfrac{\pi}{4}$ 回転すると x 軸と重なるので求める立体の体積は C_1 と C_2' で囲まれた図形を x 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積と等しい。

C_1 と C_2 の交点の一つを $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = (2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ とおく。この点を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点の座標は

$$\begin{aligned}
\left(2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right), 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right) &= \left(2\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right), 2\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \left(2\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right), 2\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{8}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

となる。同様にもう一つの C_1 と C_2 の交点 $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}\right)$$

である。したがって C_1 と C_2' の交点の座標は $\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

$A = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$，$B = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ とおくと求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_A^B (4 - x^2)dx - \pi\int_A^B \frac{1}{4x^2}dx \\
&= \pi\int_A^B \left(4 - x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)dx \\
&= \pi\left[4x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}\right]_A^B \\
&= 2\sqrt{3}\pi
\end{aligned}$$

となる。

得点	

数　　学

氏 名	

受 験 番 号	

5 座標空間において原点 O, 点 $\mathrm{A}(1,-2,2)$, 点 $\mathrm{B}(3,-4,5)$ をとり, 3 点 O, A, B が定める平面を α とする。このとき次の問に答えよ。

(1) 点 F は平面 α 上にあり, その位置ベクトル $\vec{f}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と垂直な単位ベクトルである。ただし, $\vec{f}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ は不等式 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たしている。点 F の座標を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(0,0,2)$ の位置ベクトルを $\vec{p}$ とおく。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とし, s, t がそれぞれ実数全体を動くとき, $|\vec{p}-(s\vec{e}+t\vec{f})|$ の最小値を求めよ。

[解答例]

(1) 点 F は平面 α 上にあるので

$$\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる実数 k, l がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=9$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3+8+10=21$ に注意すると, $\vec{f}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので

$$\vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=9k+21l=3(3k+7l)=0$$

となり, $k=-7a$, $l=3a$ (a は実数）と表せる。このとき

$$\vec{f}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+l\overrightarrow{\mathrm{OB}}=a\left(-7\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=a(2,2,1)$$

となり, $\vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=a(6-8+5)=3a$ となる。$\vec{f}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ は不等式 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たしているので $\vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}>0$, すなわち $a>0$ である。よって $\vec{f}$ は方向が $(2,2,1)$ の単位ベクトルであるから

$$\vec{f}=\frac{1}{\sqrt{4+4+1}}(2,2,1)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

となる。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{9}=3$ より $\vec{e}=\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ となる。$|\vec{p}|=2$, $\vec{p}\cdot\vec{e}=\dfrac{4}{3}$, $\vec{p}\cdot\vec{f}=\dfrac{2}{3}$, $|\vec{e}|=|\vec{f}|=1$, $\vec{e}\cdot\vec{f}=0$ を用いると

$$\begin{aligned}
|\vec{p}-(s\vec{e}+t\vec{f})|^2 &= (\vec{p}-(s\vec{e}+t\vec{f}))\cdot(\vec{p}-(s\vec{e}+t\vec{f}))\\
&= |\vec{p}|^2-2(s\vec{p}\cdot\vec{e}+t\vec{p}\cdot\vec{f})+s^2|\vec{e}|^2+2st\vec{e}\cdot\vec{f}+t^2|\vec{f}|^2\\
&= 4-\frac{8}{3}s-\frac{4}{3}t+s^2+t^2\\
&= \left(s-\frac{4}{3}\right)^2+\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{16}{9}
\end{aligned}$$

となるので $s=\dfrac{4}{3}$, $t=\dfrac{2}{3}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{16}{9}}=\dfrac{4}{3}$ をとる。

得 点	